2.8.19 Pythagorova věta I

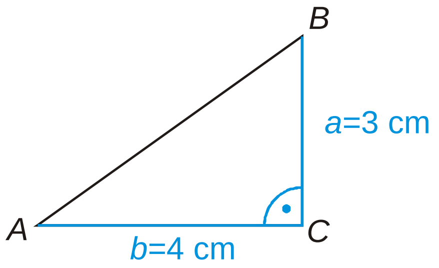
Předpoklady: 020801

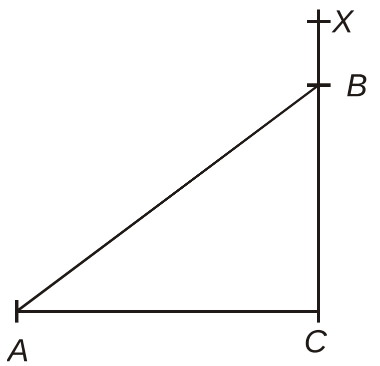
Pedagogická poznámka: V hodině se snažím, aby žáci vzorec objevili, ale nepostupujeme geometricky. Geometrickou interpretaci přidáváme až k odvozenému hotovému vzorci, je těžká i pro žáky, kterým se celou dobu snažíte podávat a^2 jako plochu čtverce o straně a.

Pedagogická poznámka: Z následujícího příkladu rýsuje každý žák pouze jeden bod podle toho, v jakém sedí oddělení.

Př. 1: Narýsuj pravoúhlý trojúhelník:
a) ABC: $\gamma = 90°$, $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$,
b) KLM: $|\sphericalangle KLM| = 90°$, $|KL| = 12\,\text{cm}$, $|LM| = 5\,\text{cm}$.
Změř délku zbývající strany.

a) ABC: $\gamma = 90°$, $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$
Náčrtek:

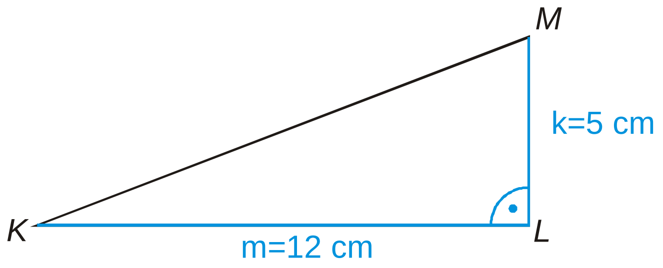


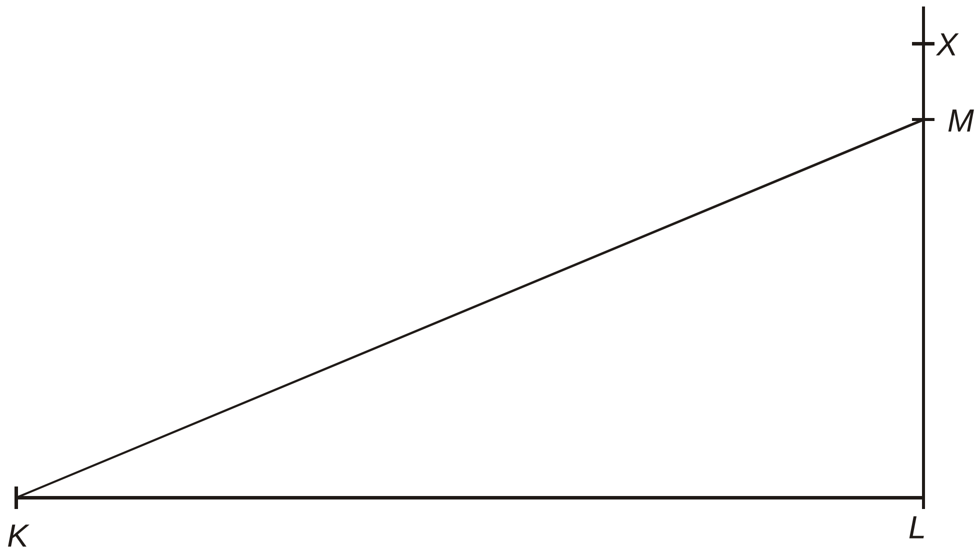


Zápis konstrukce:
1. AC, $|AC| = b = 4\,\text{cm}$
2. $\mapsto CX$, $CX \perp AC$
3. $B \in CX$, $|BC| = a = 3\,\text{cm}$
4. $\triangle ABC$

Měření jsme zjistili: $|AB| = c = 5\,\text{cm}$

b) KLM: $|\sphericalangle KLM| = 90°$, $|KL| = 12\,\text{cm}$, $|LM| = 5\,\text{cm}$
Náčrtek:





Zápis konstrukce:

1. KL, $|KL| = m = 12\,\text{cm}$

2. $\mapsto LX$, $LX \perp KL$

3. $M \in LX$, $|LM| = k = 5\,\text{cm}$

4. $\triangle KLM$

Měření jsme zjistili: $|KM| = l = 13\,\text{cm}$

Nápad: Pokud z našich údajů dokážeme trojúhelník jednoznačně narýsovat, je jednoznačně zadaný a jsou určeny velikosti všech jeho stran.
Obecně platí, že všechno, co dokážeme narýsovat, je možné i spočítat (některé věci se obtížněji počítají, jiné se obtížněji rýsují).
Zkusíme najít postup, jak spočítat stranu pravoúhlého trojúhelníka z velikostí zbývajících stran.

Známe nějaké pravoúhlé trojúhelníky, u kterých známe všechny strany?

- 3, 4, 5: bod a) prvního příkladu,
- 5, 12, 13: bod b) prvního příkladu,
- 1, 1, $\sqrt{2}$: polovina čtverce o straně 1 (z hodin, kdy jsme se zabývali druhou odmocninou).

Pravoúhlý trojúhelník má vždy největší úhel (ten pravý) a má tedy i nejdelší stranu (proti větším úhlům leží větší strany) $\Rightarrow$

- nejdelší stranu pravoúhlého trojúhelníku (ležící proti pravému úhlu) označujeme jako **přeponu**,

- zbývající dvě kratší strany označujeme jako **odvěsny**.

Přepona se písmenem označuje většinou jako c, ale toto označení není povinné, protože závisí na označení vrcholů trojúhelníku.

Př. 2: Pravoúhlý trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu B. Jak jsou označeny jeho odvěsny? Jak je označena jeho přepona?

Přepona leží proti pravému úhlu $\Rightarrow$ je značena písmenem b, odvěsny jsou značeny a a c.

Zapíšeme si délky stran do tabulky a označíme si je písmeny.

a	b	c
3	4	5
5	12	13
1	1	$\sqrt{2}$

Pedagogická poznámka: Následující úvahu samozřejmě nečekám od žáků. Občas někdo uhádne vzorec přímo z tabulky, další se chytí po poznámce o posledním řádku a druhé mocnině.

Hledáme způsob, jak spočítat přeponu z odvěsen:
Prosté sečtení nefunguje ani v jedné řádce (ani nemůže kvůli trojúhelníkové nerovnosti).
Zajímavost: v poslední řádce: přepona je rovna druhé odmocnině $\Rightarrow$ zkusíme hledat vztah pro c^2 (sloupec s c^2 si přidáme do tabulky).

a	b	c	c^2
3	4	5	25
5	12	13	169
1	1	$\sqrt{2}$	2

První nápad: sečteme a a b $\Rightarrow$ $a+b=c^2$:
- $1+1=2$,
- $3+4\neq 25$ $\Rightarrow$ nemá cenu zkoušet třetí trojúhelník.

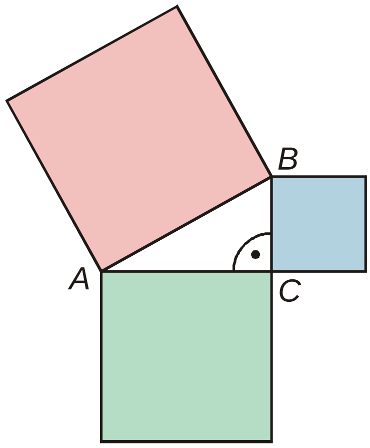
Podobně nefunguje ani $a\cdot b=c^2$:
- $1\cdot 1\neq 2$,
- $3\cdot 4\neq 25$.

Vylepšení prvního nápadu: $a^2+b^2=c^2$ - druhé mocniny jsou větší než původní čísla, srovnáváme součet druhých mocnin s druhou mocninou (musíme sčítat a porovnávat stejné věci).
- $1^2+1^2=2$,
- $3^2+4^2=9+16=25$,
- $5^2+12^2=25+144=169$,

$\Rightarrow$ zdá se, že máme správný vztah $a^2+b^2=c^2$.
Vzorec, který jsme objevili, se označuje jako Pythagorova věta.

Pythagorova věta
Pro délky odvěsen *a, b* a délku přepony *c* pravoúhlého trojúhelníku platí vztah: $a^2+b^2=c^2$**.**

Př. 3: Vysvětli pomocí obrázku, proč je Pythagorova věta většinou vyslovována takto: “Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.“



- Písmeno *a* ve vzorci označuje délku strany *a* (strany *BC*) $\Rightarrow$ výraz a^2 označuje obsah čtverce, jehož strana má délku *a* $\Rightarrow$ modrý čtverec u odvěsny *BC* má plochu a^2.
- Písmeno *b* ve vzorci označuje délku strany *b* (strany *AC*) $\Rightarrow$ výraz b^2 označuje obsah čtverce, jehož strana má délku *b* $\Rightarrow$ zelený čtverec u odvěsny *AC* má plochu b^2.
- Písmeno *c* ve vzorci označuje délku strany *c* (strany *AB*) $\Rightarrow$ výraz c^2 označuje obsah čtverce, jehož strana má délku *c* $\Rightarrow$ červený čtverec u přepony *AB* má plochu c^2.

Levá strana vzorce: a^2+b^2 - součet obsahů modrého (a^2) a zeleného (b^2) čtverce $\Rightarrow$ součet obsahů čtverců nad odvěsnami.
Pravá stran: c^2 - obsah čtverce nad přeponou.

Platí i obrácená věta k Pythagorově větě:

Jestliže pro strany *a, b, c* trojúhelníku *ABC* platí vztah $a^2+b^2=c^2$**, je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou *c* a odvěsnami *a, b*.**

Př. 4: Rozhodni, zda jsou následující trojúhelníky pravoúhlé:
a) $a=6\,\text{cm}$, $b=8\,\text{cm}$, $c=10\,\text{cm}$ b) $a=7\,\text{cm}$, $b=25\,\text{cm}$, $c=24\,\text{cm}$
c) $a=10\,\text{cm}$, $b=12\,\text{cm}$, $c=16\,\text{cm}$

a) $a=6\,\text{cm}$, $b=8\,\text{cm}$, $c=10\,\text{cm}$
Dosazujeme do vzorce $a^2+b^2=c^2$: $6^2+8^2=10^2$
$36+64=100$
$100=100$ $\Rightarrow$ trojúhelník je pravoúhlý.

b) $a=7\,\text{cm}$, $b=25\,\text{cm}$, $c=24\,\text{cm}$
Nejdelší je strana *b* $\Rightarrow$ dosazujeme do vzorce $a^2+c^2=b^2$:

$7^2 + 24^2 = 25^2$
$49 + 576 = 625$
$625 = 625 \Rightarrow$ trojúhelník je pravoúhlý s přeponou *b*.

c) $a = 10\,\text{cm}$, $b = 12\,\text{cm}$, $c = 16\,\text{cm}$
Dosazujeme do vzorce $a^2 + b^2 = c^2$: $10^2 + 12^2 = 16^2$
$100 + 144 = 256$
$244 = 256 \Rightarrow$ trojúhelník není pravoúhlý.

Př. 5: Urči přeponu pravoúhlého trojúhelníku, jestliže platí:
a) $a = 9\,\text{cm}$, $b = 12\,\text{cm}$ b) $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$

a) $a = 9\,\text{cm}$, $b = 12\,\text{cm}$
$a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = c^2$
$c = \sqrt{225} = 15\text{ cm}$

b) $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$
$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = c^2$
$c = \sqrt{13} \doteq 3{,}6\text{ cm}$

Pedagogická poznámka: Nejčastěji se objevuje následující (špatný) zápis správného řešení body a): $81 + 144 = \sqrt{225} = 15$. Píšeme si ho na tabuli a řešíme, která z rovností neplatí a jak by se mělo řešení správně napsat.

Výpočet přepony si můžeme usnadnit odvozením vzorce. Ze vztahu $a^2 + b^2 = c^2$ potřebujeme vyjádřit $c \Rightarrow$ musíme se zbavit druhé mocniny $\Rightarrow$ odmocníme (protože jde o rovnici, odmocňujeme obě strany).

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dodatek: Absolutní hodnotu ve vztahu $\sqrt{c^2} = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nepíšeme, protože *c* představuje délku strany (tedy nezáporné číslo) a proto se absolutní hodnota rovná jeho hodnotě (bez absolutní hodnoty).

Přepony pak určíme snadným dosazením:

- a) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$
- b) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \doteq 3{,}6$

Výhodou vyjádření ze vzorce je skutečnost, že do vzorce pouze dosadíme hodnoty a výsledek určíme zadáním hodnot do kalkulačky:

- a) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$
- b) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \doteq 3{,}6$

Pedagogická poznámka: Nezakazuji žáků počítat s mezihodnotami, ale dám důsledně dosazuji a pak uvádím výsledek získaný z kalkulačky.

Př. 6: Odvoď z Pythagorovy věty vzorec pro odvěsnu *a* pravoúhlého trojúhelníku. Podle výsledku napiš bez odvození vzorec pro stranu *b*.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / -b^2$

$c^2 - b^2 = a^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Odvěsny *a*, *b* hrají v Pythagorově větě stejnou roli (nezáleží, které říkáme *a* a které *b*) $\Rightarrow$ můžeme je prohazovat navzájem $\Rightarrow$ vzorec pro odvěsnu *b* musí být analogický vzorci pro odvěsnu *a*.

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Př. 7: Urči odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku, jestliže znáš-li délku přepony a odvěsny
a) 37 mm a 12 mm b) 4,1 m a 4 m c) 8 cm a 3 cm

a) 37 mm a 12 mm

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{37^2 - 12^2}\ \text{mm} = 35\,\text{mm}$

b) 4,1 m a 4 m

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4{,}1^2 - 4^2}\ \text{m} = 0{,}9\,\text{m}$

c) 8 cm a 3 cm

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - 3^2}\ \text{cm} = \sqrt{55}\ \text{cm} \doteq 7{,}4\,\text{cm}$

Shrnutí: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami ($c^2 = a^2 + b^2$).